VỀ SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ CYCLIC HẦU CO KIỂU GERAGHTY SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC

Đinh Huy Hoàng (1), **Trần Thị Ngọc Thảo** (2)
1 *Trường Đại học Vinh, Nghệ An*
2 *Trường THPT Hàm Thuận Bắc, Bình Thuận*
Ngày nhận bài 6/12/2019, ngày nhận đăng 16/02/2020

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một vài kết quả về sự tồn tại và duy nhất điểm bất động của ánh xạ cyclic hầu co kiểu Geraghty suy rộng trong không gian b-mêtric đầy đủ. Kết quả của chúng tôi là mở rộng thực sự của một vài kết quả trong các tài liệu [2], [4], [6], [7].

Từ khóa: Điểm bất động; không gian b-mêtric; co cyclic; ánh sáng cyclic hầu co kiểu Geraghty.

1 Mở đầu

Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ là một trong những kết quả quan trọng đầu tiên của lý thuyết điểm bất động. Nhiều nhà toán học đã mở rộng Nguyên lý này cho nhiều lớp không gian và nhiều loại ánh xạ khác nhau. Chúng ta để ý rằng, các ánh xạ co kiểu Banach là liên tục. Để mở rộng Nguyên lý ánh xạ co Banach cho lớp các ánh xạ không liên tục, năm 2003, Kirk và các cộng sự [5] đã đưa ra khái niệm ánh xạ cyclic và nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động của lớp ánh xạ này trong không gian mêtric. Sau đó, vấn đề về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ cyclic thỏa mãn điều kiện co nào đó đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [2], [6], [7]). Vào năm 2018, Babu và các cộng sự [2] đã chứng minh sự tồn tại duy nhất điểm bất động của các ánh xạ cyclic hầu co Geraghty. Để mở rộng lớp không gian mêtric, năm 1993, Czerwik [3] đã đưa ra khái niệm không gian b-mêtric và một số kết quả về sự tồn tại điểm bất động trong không gian này. Một vấn đề được đặt ra ở đây là kết quả của Babu [2] có thể mở rộng cho không gian b-mêtric được hay không? Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra khái niệm ánh xạ cyclic hầu co kiểu Geraghty suy rộng và chứng minh sự tồn tại duy nhất điểm bất động của nó trong không gian b-mêtric đầy đủ. Kết quả của chúng tôi là sự mở rộng kết quả của Babu [2] cho không gian b-mêtric. Hơn nữa, nếu chỉ xét trong không gian mêtric thì kết quả của chúng tôi cũng là mở rộng thực sự của Định lý 2.3 trong [2].

Đầu tiên, chúng ta trình bày một số khái niệm và kết quả cơ sở.

Ký hiệu

$S = \{g : [0; +\infty) \longrightarrow [0; 1) \,|$ với mọi dãy bị chặn $\{t_n\} \subset [0; +\infty)$ mà $g(t_n) \to 1$ thì $t_n \to 0\}$.

Năm 1973, Geraghty đã chứng minh định lý sau.

1) Email: thaonguyenthpt@gmail.com (T. T. N. Thảo)

Định lí 1.1. ([4]) *Giả sử X là không gian mêtric đầy đủ và $f : X \longrightarrow X$ là ánh xạ sao cho tồn tại $g \in S$ thỏa mãn:*

$$d(fx, fy) \leq g(d(x,y))\, d(x,y), \forall x, y \in X.$$

Khi đó, f có duy nhất điểm bất động z trong X và với mọi x_0 trong X thì $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới z, trong đó:

$$f^1 x_0 = f x_0, f^2 x_0 = f f x_0, \ldots, f^n x_0 = f f^{n-1} x_0, \ldots.$$

Định nghĩa 1.2. ([5]) Giả sử $A_1, \ldots, A_p$ là các tập con khác rỗng của không gian mêtric (X, d) và $F : \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i \longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$. Ánh xạ F được gọi là *p-cyclic* (nói gọn là *cyclic*) nếu $F(A_i) \subset A_{i+1}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, p$, trong đó $A_{p+1} = A_1$.

Định lí 1.3. ([5]) *Giả sử $A_1, \ldots, A_p$ là các tập con đóng khác rỗng của không gian mêtric đầy đủ (X, d) và $F : \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i \longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ là ánh xạ cyclic. Khi đó, nếu tồn tai $g \in S$ sao cho*

$$d(fx, fy) \leq g(d(x,y))\, d(x;y), \forall x \in A_i, y \in A_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$$

thì F có duy nhất điểm bất động.

Định nghĩa 1.4. ([2]) Giả sử $X_1, \ldots, X_p$ là các tập con đóng khác rỗng của không gian mêtric (X, d) và $F : \bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i$. Ánh xạ F được gọi là *cyclic hầu co Geraghty* nếu F là ánh xạ cyclic và tồn tại $g \in S$ và $L \geq 0$ sao cho

$$d(Fx, Fy) \leq g(d(x,y))\, d(x;y) + L\ \min\{d(x, Fx), d(y, Fx)\},$$

với mọi $x \in A_i, y \in A_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$.

Định nghĩa 1.5. ([5]) Giả sử X là tập hợp con khác rỗng và số thực $s \geq 1$. Hàm $d : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$ được gọi là *b-mêtric* nếu với mọi $x, y, z \in X$ ta có

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$;
3) $d(x,y) \leq s\,[d(x,z) + d(z,y)]$ (bất đẳng thức tam giác).

Tập X cùng với một b-mêtric trên đó được gọi là *không gian b-mêtric với tham số s*, nói gọn là *không gian b-mêtric* và được ký hiệu bởi (X, d) hoặc X.

Chú ý. 1) Từ đây về sau khi nói tới không gian b-mêtric ta luôn hiểu tham số của nó là $s \geq 1$.
2) Từ định nghĩa không gian mêtric và không gian b-mêtric ta thấy rằng không gian mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian b-mêtric khi $s = 1$.

Định nghĩa 1.6. ([3]) Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong không gian b- mêtric (X, d). Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *b-hội tụ* (nói gọn là *hội tụ*) tới $x \in X$ và được ký hiệu bởi $x_n \to x$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $d(x_n, x) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$.

Nói cách khác, $x_n \to x$ khi và chỉ khi $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq n_0$.

Không gian b-mêtric được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.

Bổ đề 1.7. ([3]) *Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong không gian b-mêtric (X, d) và $x_n \to x \in X$. Khi đó,*

[1)]

1. *$\{x_n\}$ là dãy Cauchy;*
2. *x là duy nhất;*
3. $\dfrac{1}{s}d(x, y) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) \leq sd(x, y)$ *với mọi $y \in X$.*

Bổ đề 1.8. ([1]) *Giả sử (X, d) là không gian b-mêtric, $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy trong X lần lượt hội tụ tới x và y. Khi đó, ta có*

$$\frac{1}{s^2}d(x, y) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq s^2 d(x, y).$$

Đặc biệt, nếu $x = y$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

2 Các kết quả chính

Định nghĩa 2.1. Giả sử $X_1, \ldots, X_p$ là các tập con khác rỗng của không gian b-mêtric (X, d) và $F : \bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i$. Ánh xạ F được gọi là *cyclic hầu co kiểu Geraghty suy rộng* nếu F là ánh xạ cyclic và tồn tại $g \in S$ và các hằng số không âm $L, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ sao cho

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 s \leq 1, \tag{1}$$

$$\alpha_1 s^2 + (\alpha_4 + \alpha_5)\, s \leq 1, \tag{2}$$

$$(\alpha_3 + \alpha_4 s)\, s < 1 \tag{3}$$

và

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad \leq \quad & g(d(x, y))\big[\alpha_1 d(x, y) + \alpha_2 d(x, Fx) \\ & + \alpha_3 d(y, Fy) + \alpha_4 d(x, Fy) + \alpha_5 d(y, Fx)\big] \\ & + L \min\{d(x, Fx), d(y, Fx)\} \end{aligned} \tag{4}$$

với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$, trong đó $X_{p+1} = X_1$.

Nhận xét 2.2. Trong Định nghĩa 2.1, nếu ta lấy $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ và $s = 1$ (tức (X, d) là không gian mêtric) thì ta nhận được khái niệm ánh xạ cyclic hầu co Geraghty phát biểu trong Định nghĩa 1.4. Nói cách khác, ánh xạ cyclic hầu co Geraghty là trường hợp đặc biệt của ánh xạ cyclic hầu co kiểu Geraghty suy rộng.

Định lí 2.3. *Giả sử $X_1, \ldots, X_p$ là các tập con đóng khác rỗng của không gian b-mêtric đầy đủ (X, d) và $F : \bigcup_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ là ánh xạ cyclic hầu co kiểu Geraghty suy rộng. Khi đó, F có duy nhất một điểm bất động $z \in \bigcap_{i=1}^{p} X_i$, và với mỗi điểm $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{p} X_i$, dãy $\{F^n x_0\}$ hội tụ tới z.*

Chứng minh. Lấy $x_0 \in X_i$ với i nào đó thuộc $\{1, 2, \ldots, p\}$ và đặt

$$x_n = Fx_{n-1} = F^n x_0, \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Nếu tồn tại n_0 sao cho $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, tức $x_{n_0} = Fx_{n_0}$ thì x_{n_0} là điểm bất động của F. Do đó ta giả sử $x_n \neq x_{n+1}$ với mọi $n = 0, 1, \ldots$. Vì F là ánh xạ cyclic nên $F(X_i) \subset X_{i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, p$, trong đó $X_{p+1} = X_1$. Từ đó suy ra rằng, với mỗi $n = 1, 2, \ldots$ tồn tại $i_n \in \{1, 2, \ldots, p\}$ sao cho $x_n \in X_{i_n}, x_{n+1} \in X_{i_n+1}$. Do đó, sử dụng điều kiện (4) và bất đẳng thức tam giác ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Fx_{n-1}, Fx_n) \\ &\leq g(d(x_{n-1}, x_n))\big[\alpha_1 d(x_{n-1}, x_n) + \alpha_2 d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + \alpha_3 d(x_n, x_{n+1}) + \alpha_4 d(x_{n-1}, x_{n+1}) + \alpha_5 d(x_n, x_n)\big] \\ &\quad + L \min\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_n)\} \\ &\leq (\alpha_1 + \alpha_2) d(x_{n-1}, x_n) + \alpha_3 d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \alpha_4 s d(x_{n-1}, x_n) + \alpha_4 s d(x_{n+1}, x_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_4) d(x_{n-1}, x_n) + (\alpha_3 + s\alpha_4) d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{5}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Do đó

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_4}{1 - \alpha_3 - s\alpha_4}\, d(x_n, x_{n+1}),\ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Từ điều kiện (1) suy ra $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_4}{1 - \alpha_3 - s\alpha_4} \leq 1$. Do đó

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n-1})\ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Như vậy $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm các số không âm. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1})$. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) := r$. Ta có $r \geq 0$. Giả sử $r > 0$. Khi đó, từ (5) suy ra các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ không đồng thời bằng 0 và

$$\frac{d(x_n, x_{n+1})}{(\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_4) d(x_{n-1}, x_n) + (\alpha_3 + s\alpha_4) d(x_n, x_{n+1})} \leq g(d(x_{n-1}, x_n)) < 1 \tag{6}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$.
Mặt khác

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} & \frac{d(x_n, x_{n+1})}{(\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_4)d(x_{n-1}, x_n) + (\alpha_3 + s\alpha_4)d(x_n, x_{n+1})} \\
= & \frac{r}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2s\alpha_4)r} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2s\alpha_4} \geq 1.
\end{aligned}$$

Kết hợp với (6) suy ra $\lim_{n\to\infty} g(d(x_n, x_{n-1})) = 1$. Sử dụng tính chất của hàm g suy ra

$$r = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $r > 0$. Vậy $r = 0$, tức

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{7}$$

Tiếp theo ta chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+k}) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N},\ k \equiv 1\ (mod\ p). \tag{8}$$

Giả sử khẳng định (8) không đúng. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mỗi $n = 1, 2, \ldots$ tồn tại hai số tự nhiên m_n, k_n sao cho $m_n > n,\ k_n \equiv 1\ (mod\ p)$,

$$d(x_{m_n}, x_{m_n+k_n}) > \varepsilon \tag{9}$$

và m_n là số tự nhiên bé nhất thỏa mãn (9), tức là:

$$d(x_{m_n-1}, x_{m_n-1+k_n}) \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Vì $k_n \equiv 1\ (mod\ p)$ nên $m_n + k_n - 1 - (m_n - 1) \equiv 1\ (mod\ p)$. Do đó, nếu $x_{m_n-1} \in X_{i_n}$ với $i_n \in \{1, 2, \ldots, p\}$ thì $x_{m_n+k_n-1} \in X_{i_n+1}$. Từ đó, sử dụng điều kiện (4) với mỗi $n = 1, 2, \ldots$ ta có

$$\begin{aligned}
d(x_{m_n}, x_{m_n+k_n}) \quad & = d(Fx_{m_n-1}, Fx_{m_n+k_n-1}) \\
\leq \quad & g(d(x_{m_n-1}, x_{m_n+k_n-1}))\big[\alpha_1\ d(x_{m_n-1}, x_{m_n+k_n-1}) \\
& + \alpha_2\ d(x_{m_n-1}, x_{m_n}) + \alpha_3\ d(x_{m_n+k_n-1}, x_{m_n+k_n}) \\
& + \alpha_4\ d(x_{m_n-1}, x_{m_n+k_n}) + \alpha_5\ d(x_{m_n+k_n-1}, x_{m_n})\big] \\
& + L \min\{d(x_{m_n-1}, x_{m_n}), d(x_{m_n+k_n-1}, x_{m_n})\} \\
\leq \quad & g(d(x_{m_n-1}, x_{m_n+k_n-1}))\big[\alpha_1 s d(x_{m_n-1}, x_{m_n}) \\
& + \alpha_1 s^2 d(x_{m_n}, x_{m_n+k_n}) + \alpha_1 s^2 d(x_{m_n+k_n}, x_{m_n+k_n-1}) \\
& + \alpha_2 d(x_{m_n-1}, x_{m_n}) + \alpha_3 d(x_{m_n+k_n-1}, x_{m_n+k_n}) \\
& + \alpha_4 s d(x_{m_n-1}, x_{m_n}) + \alpha_4 s d(x_{m_n}, x_{m_n+k_n}) \\
& + \alpha_5 s d(x_{m_n+k_n-1}, x_{m_n+k_n}) + \alpha_5 s d(x_{m_n+k_n}, x_{m_n})\big] \\
& + L\, d(x_{m_n-1}, x_{m_n}).
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[1-(\alpha_1 s^2+\alpha_4 s+\alpha_5 s)\ g(d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}))\right]\ d(x_{m_n},x_{m_n+k_n}) \\ &\leq g(d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}))\left[(\alpha_1 s+\alpha_2+\alpha_4 s)\ d(x_{m_n-1},x_{m_n}) \right. \\ &\quad \left. +(\alpha_1 s^2+\alpha_3 s+\alpha_5 s)\ d(x_{m_n+k_n-1},x_{m_n+k_n})+L\ d(x_{m_n-1},x_{m_n})\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Từ (7) và $g(t)\in[0,1)$ với mọi $t\geq 0$ suy ra vế phải của (11) tiến tới không khi $n\to\infty$. Do đó, từ (11) suy ra

$$\lim_{n\to\infty}[1-(\alpha_1 s+\alpha_4+\alpha_5)s\ g(d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}))]\ d(x_{m_n},x_{m_n+k_n})=0.$$

Kết hợp với (9) suy ra

$$\lim_{n\to\infty}[1-(\alpha_1 s+\alpha_4+\alpha_5)s\ g(d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}))]=0.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $(\alpha_1 s+\alpha_4+\alpha_5)s=1$ và $\lim_{n\to\infty}g(d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}))=1$ bởi vì theo điều kiện (2) thì $(\alpha_1 s+\alpha_4+\alpha_5)s\leq 1$ và hàm g nhận giá trị trong $[0,1)$ nên $\lim_{n\to\infty}g(d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}))\leq 1$. Từ (10) và tính chất của g suy ra

$$\lim_{n\to\infty}d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1})=0. \tag{12}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon\leq d(x_{m_n},x_{m_n+k_n}) &\leq sd(x_{m_n},x_{m_n-1})+s^2 d(x_{m_n-1},x_{m_n+k_n-1}) \\ &\quad +s^2 d(x_{m_n+k_n-1},x_{m_n+k_n}). \end{aligned}$$

Cho $n\to\infty$, sử dụng (7) và (12) ta có $\varepsilon<0$. Đây là một điều vô lý. Vậy khẳng định (8) là đúng.

Bây giờ ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Với mỗi $j=1,2,\ldots$ ắt tồn tại $l\in\{0,1,\ldots,p-1\}$ sao cho

$$0\leq j-l\equiv 1\ (mod\ p).$$

Do đó theo (8) ta có

$$\lim_{n\to\infty}d(x_{n+j-l},x_n)=0. \tag{13}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức tam giác nhiều lần ta có

$$\begin{aligned} 0\leq d(x_{n+j-l},x_{n+j}) &\leq sd(x_{n+j-l},x_{n+j-l+1}) \\ &\quad +s^2 d(x_{n+j-l+1},x_{n+j-l+2})+\ldots \\ &\quad +s^{l-1}d(x_{n+j-1},x_{n+j})\ \forall n. \end{aligned} \tag{14}$$

Từ (7) suy ra vế phải của (14) hội tụ tới 0 khi $n\to\infty$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty}d(x_{n+j-l},x_{n+j})=0. \tag{15}$$

Từ (13), (15) và bất đẳng thức

$$d(x_{n+j}, x_n) \leq s[d(x_{n+j}, x_{n+j-l}) + d(x_{n+j-l}, x_n)]\ \forall n$$

suy ra

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+j}, x_n) = 0 \text{ với mọi } j = 1, 2, \ldots.$$

Do đó $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Vì (X, d) là không gian đầy đủ nên tồn tại $z \in X$ sao cho $x_n \to z$. Vì $\{x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ nên từ tính cyclic của g và cách xây dựng $\{x_n\}$ suy ra rằng, với mỗi $i = 1, 2, \ldots, p$ tồn tại dãy con $\{x_{i_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{i_n}\} \subset X_i$. Do $x_n \to z$ nên $x_{i_n} \to z$. Kết hợp với tính đóng của X_i suy ra $z \in X_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, p$ tức $z \in \bigcap_{i=1}^{p} X_i$.

Tiếp theo, ta chứng minh z là điểm bất động của F. Vì $z \in X_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, p$ nên sử dụng điều kiện (4) ta có

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Fz) &= d(Fx_n, Fz) \\ &\leq g(d(x_n, z))[\alpha_1 d(x_n, z) + \alpha_2 d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \alpha_3 d(z, Fz) + \alpha_4 d(x_n, Fz) + \alpha_5 d(z, x_{n+1})] \\ &\quad + L\ \min\{d(x_n, x_{n+1}), d(z, x_{n+1})\} \\ &\leq \alpha_1 d(x_n, z) + \alpha_2 d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \alpha_3 d(z, Fz) + \alpha_4 s\ d(x_n, z) + \alpha_4 s\ d(z, Fz) \\ &\quad + \alpha_5 d(z, x_{n+1}) + L\ d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$.

Vì $x_n \to z$ nên theo Bổ đề 1.7 ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} d(z, Fz) &\leq \limsup_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Fz) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [\alpha_1 d(x_n, z) + \alpha_2 d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4 s) d(z, Fz) + \alpha_4 s d(x_n, z) + \alpha_5 d(z, x_{n+1}) \\ &\quad + L\ d(x_n, x_{n+1})] \\ &\leq (\alpha_3 + \alpha_4 s) d(z, Fz). \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (3) suy ra $d(z, Fz) = 0$ tức $z = Fz$. vậy z là điểm bất động của F.

Cuối cùng, ta chứng minh điểm bất động z của F là duy nhất. Giả sử y cũng là điểm bất động của F, tức là $y = Fy$. Vì F là ánh xạ cyclic nên $y \in \bigcap_{i=1}^{p} X_i$. Do đó, sử dụng điều kiện (4) ta có

$$\begin{aligned} d(z, y) &= d(Fz, Fy) \leq g(d(z, y))[\alpha_1 d(z, y) \\ &\quad + \alpha_2 d(z, z) + \alpha_3 d(y, y) + \alpha_4 d(z, y) \\ &\quad + \alpha_5 d(y, z)] + L\ \min\{d(z, z), d(y, z)\} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5) g(d(z, y))\ d(z, y). \end{aligned}$$

Vì $0 \leq (\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5)g(d(z, y)) < 1$ nên $d(z, y) = 0$, tức là $z = y$. Vậy điểm bất động của F là duy nhất.

$\square$

Sau đây là một số hệ quả của Định lý 2.3.

Hệ quả 2.4. *Giả sử (X, d) là không gian b-mêtric đầy đủ, $X_1, \ldots, X_p$ là các tập con đóng khác rỗng của X, $F : \bigcup_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ là ánh xạ cyclic. Khi đó, nếu tồn tại các hằng số không âm $L, \beta_1, \ldots, \beta_5$ sao cho*

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 s < 1, \tag{16}$$

$$\beta_1 s^2 + (\beta_4 + \beta_5)s < 1, \tag{17}$$

$$(\beta_3 + \beta_4 s)s < 1, \tag{18}$$

và

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad \leq \quad & \beta_1 d(x, y) + \beta_2 d(x, Fx) + \beta_3 d(y, Fy) \\ & + \beta_4 d(x, Fy) + \beta_5 d(y, Fx) \\ & + L \;\min\{d(x, Fx), d(y, Fx)\} \end{aligned} \tag{19}$$

với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$; trong đó $X_{p+1} = X_1$ thì F có duy nhất điểm bất động trong $\bigcap_{i=1}^{p} X_i$.

Chứng minh. Từ (16), (17) và (18) suy ra tồn tại các hằng số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ sao cho $\beta_i < \alpha_i, i = 1, 2, \ldots, 5$ và

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 s &\leq 1, \\ \alpha_1 s^2 + (\alpha_4 + \alpha_5)s &\leq 1, \\ (\alpha_3 + \alpha_4 s)s &< 1. \end{aligned}$$

Đặt $\alpha = \max\left\{\dfrac{\beta_i}{\alpha_i} : i = 1, 2, \ldots, 5; \alpha_i \neq 0\right\}$ và xác định hàm $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1)$ bởi công thức

$$g(t) = \begin{cases} \alpha + \dfrac{1-\alpha}{1+t} & \forall t \in (0, +\infty), \\ \alpha \text{ nếu } t = 0. \end{cases}$$

Khi đó, $g \in S$ và $g(t) \geq \alpha$ với mọi $t \in [0, +\infty)$. Do đó $\beta_i \leq \alpha_i g(t) \,\forall t \in [0, +\infty)$. Kết hợp với (19) suy ra:

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad \leq \quad & g(d(x, y))\Big[\alpha_1 d(x, y) + \alpha_2 d(x, Fx) \\ & + \alpha_3 d(y, Fy) + \alpha_4 d(x, Fy) + \alpha_5 d(y, Fx)\Big] \\ & + L \min\{d(x, Fx), d(y, Fx)\} \end{aligned}$$

với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Như vậy các điều kiện của định lý 2.3 được thỏa mãn. Do đó điều cần chứng minh được suy ra từ Định lý 2.3. □

Trong Hệ quả 2.4 nếu lấy $s = 1$ (tức (X, d) là không gian mêtric) thì ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.5. *Giả sử (X, d) là không gian mêtric đầy đủ, $X_1, \ldots, X_p$ là các tập con đóng khác rỗng của X, $F : \bigcup_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ là ánh xạ cyclic. Khi đó, nếu tồn tại các hằng số không âm $L, \beta_1, \ldots, \beta_5$ sao cho*

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 < 1,$$

$$\beta_1 + \beta_4 + \beta_5 < 1,$$

và

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad \leq \quad & \beta_1 d(x, y) + \beta_2 d(x, Fx) + \beta_3 d(y, Fy) \\ & + \beta_4 d(x, Fy) + \beta_5 d(y, Fx) \\ & + L \ \min\{d(x, Fx), d(y, Fx)\} \end{aligned}$$

với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$; trong đó$X_{p+1} = X_1$ thì F có duy nhất điểm bất động trong $\bigcap_{i=1}^{p} X_i$.

Từ Hệ quả 2.5 trực tiếp suy ra hai hệ quả sau.

Hệ quả 2.6. ([7], Theorem 3.1) *Giả sử (X, d) là không gian mêtric đầy đủ; $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1} = X_1$ là các tập con đóng khác rỗng của X và $F : \bigcup_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ là ánh xạ cyclic. Khi đó, nếu tồn tại các số thực $a \in [0, 1), b \in [0, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{2})$ sao cho với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$ một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) &\leq ad(x, y), \\ d(Fx, Fy) &\leq b[d(x, Fx) + d(y, Fy)], \\ d(Fx, Fy) &\leq c[d(x, Fy) + d(y, Fx)] \end{aligned}$$

thì F có duy nhất điểm bất động trong $\bigcap_{i=1}^{p} X_i$.

Hệ quả 2.7. ([6], Theorem 7) *Giả sử* (X, d) *là không gian mêtric đầy đủ;* $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1} = X_1$ *là các tập con đóng khác rỗng của* X *và* $F : \bigcup_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ *là ánh xạ cyclic. Khi đó, nếu tồn tại các số thực không âm* a, b, c *sao cho*

$$a + b + c < 1$$

và

$$d(Fx, Fy) \leq ad(x, y) + bd(x, Fx) + cd(y, Fy)$$

với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$
thì F *có duy nhất điểm bất động trong* $\bigcap_{i=1}^{p} X_i$.

Hệ quả 2.8. *Giả sử* (X, d) *là không gian mêtric đầy đủ;* $X_1, X_2, \ldots, X_p$ *là các tập con đóng khác rỗng của* X *và* $F : \bigcup_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ *là ánh xạ cyclic. Khi đó, nếu tồn tại các hằng số không âm* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ *sao cho*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_5 < 1$$

và với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}$ *hoặc* $y \in X_i, x \in X_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, p$ *ta có*

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad &\leq \quad \alpha_1 d(x, y) + \alpha_2 d(x, Fx) + \alpha_3 d(y, Fy) \\ &\quad + \alpha_4 d(x, Fy) + \alpha_5 d(y, Fx), \end{aligned} \tag{20}$$

trong đó $X_{p+1} = X_1$
thì F *có duy nhất một điểm bất động trong* $\bigcap_{i=1}^{p} X_i$.

Chứng minh. Với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}$, từ (20) ta có

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad &= \quad d(Fy, Fx) \leq \alpha_1 d(x, y) + \alpha_2 d(y, Fy) \\ &\quad + \alpha_3 d(x, Fx) + \alpha_4 d(y, Fx) + \alpha_5 d(x, Fy). \end{aligned} \tag{21}$$

Từ (20) và (21) suy ra

$$\begin{aligned} d(Fx, Fy) \quad &\leq \quad \alpha_1 d(x, y) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} d(x, Fx) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} d(y, Fy) \\ &\quad + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{2} d(x, Fy) + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{2} d(y, Fx) \\ &:= \quad \gamma_1 d(x, y) + \gamma_2 [d(x, Fx) + d(y, Fy)] \\ &\quad + \gamma_3 [d(x, Fy) + d(y, Fx)] \end{aligned}$$

với mọi $x \in X_i, y \in X_{i+1}$, trong đó

$$\gamma_1 := \alpha_1, \gamma_2 := \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}, \gamma_3 := \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{2}.$$

Ta có

$$\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_5 < 1.$$

Như vậy các điều kiện của Hệ quả 2.5 được thỏa mãn với $L = 0, \beta_1 = \gamma_1, \beta_2 = \beta_3 = \gamma_2, \beta_4 = \beta_5 = \gamma_3$. Do đó điều phải chứng minh được suy ra từ Hệ quả 2.5. □

Trong Định lý 2.3, nếu lấy $s = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ ta nhận được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.9. ([2], Theorem 2.3) *Giả sử $X_1, \ldots, X_2$ là các tập con đóng khác rỗng trong không gian mêtric đầy đủ (X, d) và $F : \bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i \longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{p} X_i$ là ánh xạ cyclic hầu co Geraghty. Khi đó F có duy nhất điểm bất động trong $\bigcap\limits_{i=1}^{p} X_i$.*

Nhận xét 2.10. Hệ quả 2.9 cho thấy rằng, Định lí 2.3 là mở rộng Định lí 2.3 trong [2] cho không gian b-mêtric. Thực ra, ngay cả trong trường hợp đăc biệt không gian mêtric thì Định lí 2.3 vẫn là mở rộng thưc sự của Định lí 2.3 trong [2]. Ví dụ sau đây chứng minh khẳng định này.

Ví dụ 2.11. Cho $X = \{1, 2, 3\}, A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{1, 3\}$. Ta xác định $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ bởi công thức

$$d(1, 2) = d(1, 3) = 1, d(2, 3) = 2,$$
$$d(x, x) = 0, d(x, y) = d(y, x)\, \forall x, y \in X.$$

Chứng minh. Ta dễ dàng kiểm tra được (X, d) là không gian mêtric đầy đủ, A_1 và A_2 là các tập con đóng trong X.

Giả sử $f : X \longrightarrow X$ là ánh xạ được cho bởi

$$f1 = f2 = 1, f3 = 2.$$

Ta thấy $f(A_1) \subset A_2$ và $f(A_2) \subset A_1$. Do đó f là ánh xạ cyclic.

Giả sử $g \in S$. Khi đó $g(t) < 1$ với mọi $t \geq 0$. Do đó với mọi $g \in S$ ta có

$$g(d(1, 3))d(1, 3) + L \min\{d(1, 1), d(3, 1)\} < d(1, 3) = 1 = d(f1, f3).$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ f không là ánh xạ hầu co Geraghty. Do đó Định lí 2.3 trong [2] không áp dụng được cho f.

Bây giờ ta chứng tỏ Định lí 2.3 áp dụng được cho f. Ta lấy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0, \alpha_3 = \dfrac{4}{5}$ và xác định hàm $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1)$ với g(t)= $\dfrac{3}{4}$ nếu $t = 0$

$\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4(1+t)}$ nếu $t > 0$. Ta có $g \in S$ và

$$\begin{aligned} d(f1, f2) &= d(f1, f1) = 0, \\ d(f1, f3) &= d(1, 2) = 1 < \frac{3}{4}.\frac{4}{5}.2 = \frac{3}{4}.\frac{4}{5}d(f3, 3) \\ &< g(d(1, 3))\alpha_3 d(3, f3) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} d(f2, f3) &= 1 < \frac{3}{4}.\frac{4}{5}.2 = \frac{3}{4}\alpha_3 d(3, f3) \\ &< g(d(2,3))\alpha_3 d(3, f3). \end{aligned}$$

Do đó f thỏa mãn các điều kiện của Định lí 2.3 với $s = 1, L = 0$. Như vậy Định lí 2.3 áp dụng được cho f và ta thấy f có điểm bất động duy nhất là 1.

□

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Aghajani, M. Abbas and J. R. Roshan, "Common fixed point of generalized weak contractive mapping in partically ordered b-metric spaces", *Math. Slovaca,* 2014.

[2] G. V. R. BaBu, K. M. M. Sarma, V. A. Kumari and P. Sudheer, "Fixed point resuls of various cyclic contractions in metric spaces", *International Journal of Advances in Mathematics*, Vol. 2018, No. 5, 1-13, 2018.

[3] S. Czerwik, *Contraction mappings in b-metric space*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 1, No. 1, pp. 5-11, 1993.

[4] M. A. Geraghty, "On contractive maps", *Proc. of Amer. Math. Soc*, 40, pp. 604-608, 1973.

[5] W. A. Kirt, P. S. Srinivasa and P. Vrearamani, "Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions", *Fixed Point Theory*, Vol. 4, No. 1, pp. 79-89, 2003.

[6] M. A. Petric, "Some results concerning cyclical contractive mappings", *General Mathematics*, Vol. 18, No. 4, pp. 213-226, 2010.

[7] M. A. Petric and B. Zlatanov, *Fixed point theorems of Kannan type for cyclic contractive conditions*, Anniversity International Conference REMIA, Plovdiv, Bulgaria, pp. 187-194, 2010.

SUMMARY

ON EXISTENCE OF FIXED POINTS FOR GENERALIZED GERAGHTY TYPE ALMOST CYCLIC CONTRACTIONS IN b-METRIC SPACES

In this paper, we estalibsh the existence and uniqueness of fixed point for generalized Geraghty type of almost cyclic contraction mappings in b-metric spaces. These results extend and generalize well-known results in [2], [4], [6], [7].

Keyword: Fixed point; b-metric space; cyclic contraction; Almost Geraghty cyclic type contraction mapping.